



EDUCAÇÃO CIÊNCIA E SAÚDE
<http://dx.doi.org/10.20438/ecs.v7i2.323>

MODELAGEM MATEMÁTICA COMO ESTRATÉGIA METODOLÓGICA PARA O ENSINO DE INTEGRAL DEFINIDA

Célia Maria Rufino Franco¹, Leonardo Lira de Brito¹, Josevandro Barros Nascimento², Ysmênia Karla Medeiros de Azêvedo Almeida³

¹ Unidade Acadêmica de Física e Matemática (UAFM), Centro de Educação e Saúde (CES), Universidade Federal de Campina Grande (UFCG), Cuité-PB, Brasil.

² Departamento de Ciências Exatas - DCX, Universidade Federal da Paraíba - Campus IV, Brasil.

³ Curso de Licenciatura em Matemática, Unidade Acadêmica de Física e Matemática, Universidade Federal de Campina Grande, Cuité-PB, Brasil.

Email para correspondência: celiarufino@ufcg.edu.br

Resumo

Neste artigo será relatada uma experiência com a utilização da modelagem matemática no ensino de Cálculo Diferencial e Integral, de modo particular, no ensino das Integrais Definidas. A presente pesquisa foi desenvolvida em uma turma de Cálculo Diferencial e Integral II, do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Campina Grande (Campus Cuité), durante o semestre letivo de 2018.1. Após alguns estudos teóricos realizados nas aulas de Cálculo foi proposto o problema de obter o volume de uma laranja e a área da sua superfície. Vários métodos foram utilizados e os resultados foram comparados. O processo de modelagem se deu na evolução dos conceitos matemáticos empregados. Com este trabalho, se propôs verificar na prática como seria o desenvolvimento de uma aula de Cálculo com uso da modelagem matemática e como seria a receptividade dos alunos diante deste recurso. A partir das aplicações foi possível concluir que o uso da modelagem matemática para o ensino de integrais definidas pode ser bem proveitoso, tornando a aula dinâmica e atrativa.

Palavras-chave: Aplicações; Cálculo; Laranja; Volume; Área de superfície.

Abstract

In this article an experience will be reported with the use of mathematical modeling in the teaching of Differential and Integral Calculus, in particular, in the teaching of Defined Integrals. This research was developed in a class of Differential and Integral Calculus II, in the Mathematics course at the Federal University of Campina Grande (Campus Cuité), during the 2018.1 semester. After some theoretical studies carried out in the Calculus classes, the problem of obtaining the volume of an orange and the area of its surface was proposed. Several methods were used and the results were compared. The modeling process took place in the evolution of the mathematical concepts employed. With this work, it was proposed to verify in practice how it would be to develop a Calculus class using mathematical modeling and how it would be the students' receptivity to this resource. From the applications

it was possible to conclude that the use of mathematical modeling for the teaching of defined integrals can be very profitable, making the class dynamic and attractive.

Keywords: Applications; Calculus; Orange; Volume; Surface area.

1 Introdução

As pesquisas apontam que a aprendizagem em Matemática apresenta grandes dificuldades desde a educação básica ao ensino superior. Isto se dá, muitas vezes, pela forma que os conteúdos são ensinados e pelo pensamento enraizado na sociedade de que a matemática é uma ciência para poucos, onde apenas mentes privilegiadas são capazes de aprender e dominar tais conhecimentos.

Sabe-se que a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral apresenta alto índice de retenção, o que está relacionado com as dificuldades que os alunos enfrentam ao ingressarem em cursos de exatas.

A graduação em Matemática sempre apresentou elevados índices de desistências, reprovações e insucessos dos alunos em Cálculo Diferencial Integral (CDI), não apenas na universidade e no curso pesquisado, mas nos diversos cursos de várias instituições. A grande maioria dos alunos têm a matéria como um monstro que assombra a todos enquanto está sendo cursada pelo seu histórico. (STARON, 2016, p. 1)

As dificuldades apresentadas pelos alunos durante o curso estão relacionadas principalmente com as disciplinas do básico. Tendo em vista que o Curso de Licenciatura em Matemática apresenta nota de corte relativamente baixa, tem-se observado o ingresso de alunos que não tem uma boa base do Ensino Fundamental e do Ensino Médio e, como consequência, são influenciados a evadir-se do curso ou das disciplinas de Cálculo.

O estudante, ao ingressar na universidade, não tem amadurecimento matemático necessário para obter a aprovação num curso de cálculo com o atual nível de exigência que é utilizado no curso. [...] Ele traz consigo deficiências de formação matemática do ensino médio e que não consegue suprir na universidade. (LOPES, 1999, p. 135)

Diante desta problemática, surgem diversos pesquisadores que estudam e desenvolvem metodologias tais como: Modelagem Matemática, Resolução de Problemas, Uso dos Materiais Manipuláveis, Uso das Tecnologias de Informação e Comunicação, dentre outras metodologias que tem como objetivo auxiliar no processo de ensino e aprendizagem da matemática (ANDRADE, 2008; BASSANEZI, 2002; LORENZATO, 2006; ONUCHIC E ALLEVATO,

2011). Este relato de experiência, mostra a Modelagem Matemática como metodologia auxiliar no ensino de Cálculo Diferencial e Integral.

A Modelagem Matemática utilizada como estratégia de ensino-aprendizagem é um dos caminhos a ser seguido para tornar um curso de matemática, em qualquer nível, mais atraente e agradável. (BASSANEZI, 2002, p. 177)

Para isso, far-se-á necessário primeiro entender como surgiu a Modelagem Matemática (MM). Segundo Renz (2015), a Modelagem Matemática surge com a necessidade do homem em dominar o meio em que vive e é tão antiga quanto a própria Matemática. Desde a construção da primeira roda até os dias atuais têm-se relatos de modelos matemáticos que muito contribuíram para a evolução da espécie humana.

Segundo Biembengut (2009), nas primeiras décadas do século XX aconteceram as primeiras tentativas de inserir a Modelagem Matemática no campo da educação matemática, mas foi somente na década de 60, com um movimento chamado utilitarista, definido como aplicação prática dos conhecimentos matemáticos para a ciência e a sociedade, que pesquisadores e professores do cenário internacional começaram a debater sobre construções de modelos matemáticos como estratégia de ensino.

Dentre os principais eventos, destaca-se o Lausanne Symposium, que aconteceu em 1968, na Suíça, e tinha como tema central debater como ensinar Matemática de uma forma aplicada e útil, destacando a realidade do estudante e não apenas aplicações padronizadas, mas que favorecessem as habilidades dos alunos em modelar situações do cotidiano.

Ainda de acordo com Biembengut (2009), tais movimentos influenciaram, praticamente ao mesmo tempo, os professores de Matemática do Brasil a inserir a Modelagem Matemática no ensino da Matemática. A proposta de se trabalhar com modelo matemático surge por aqui no final da década de 60, através de professores e pesquisadores brasileiros que participaram de congressos internacionais de Modelagem Matemática. A ideia inicial era utilizar a Modelagem Matemática em sala de aula para facilitar o ensino da Matemática e motivar o aluno a pesquisar.

De acordo com Spina (2002), o uso da modelagem matemática nas aulas de cálculo diferencial e integral é uma estratégia de ensino-aprendizagem na

qual é possível estabelecer uma maneira criativa, contextualizada e motivadora para os alunos, devido todo envolvimento deste com o tema e com a situação sugerida.

Neste trabalho, pretende-se mostrar o uso da modelagem matemática nas aulas de Cálculo Diferencial e Integral, de maneira que se torne um assunto agradável para alunos e professores, podendo assim contribuir para minimizar o alto índice de retenção e evasão que existe nesta disciplina. Para tanto, procurou-se resolver o problema de calcular a área da superfície de uma laranja e seu volume por vários métodos: mecânico experimental, através de conceitos de geometria espacial e usando integral definida.

2 Modelagem matemática no ensino de Cálculo

A Modelagem Matemática surge no ensino de Cálculo Diferencial e Integral, como uma possibilidade de tornar essa disciplina, que é temida pela maioria dos alunos, em uma disciplina mais próxima da realidade e dando significado aos conceitos que são abordados.

Embora o Cálculo seja uma disciplina presente no currículo de muitos cursos superiores, as dificuldades com seu ensino e sua aprendizagem têm representado um problema para professores e estudantes tanto dos cursos de Matemática como para os de cursos de serviço. (ALMEIDA, FATORI e SOUSA, 2010, p.3)

O que se pode perceber é que o insucesso dos alunos está fortemente relacionado com a não adequação dos conteúdos que compõe os programas das disciplinas de Cálculo à realidade dos estudantes e às necessidades do sistema social, cultural e econômico, com uma metodologia que, em geral, prioriza operações, técnicas e repetição de algoritmos, entre outros fatores.

A forma como são estruturados os livros didáticos de Cálculo adotados nas universidades brasileiras também não favorece o desenvolvimento e a aprendizagem dos alunos. De modo geral, cada capítulo é iniciado com definições seguidas de teoremas ou propriedades, depois são apresentados alguns exemplos de exercícios que utilizam estas definições e só ao final do capítulo são apresentadas algumas aplicações relacionadas ao assunto. Deste modo, o aluno, além de já receber os problemas prontos, ao resolvê-los já sabe, de antemão, a que conceitos deve recorrer. (ALMEIDA, FATORI E SOUSA, 2010, p.3)

No processo evolutivo da Educação Matemática, a inclusão de aspectos de

aplicações e resolução de problemas e modelagem, têm sido defendida por várias pessoas envolvidas com o ensino de matemática. Isto significa, entre outras coisas, que a disciplina deve ser ensinada de um modo significativo, considerando as próprias realidades do sistema educacional. Neste sentido, defende-se que “a construção de modelos – modelagem, se explorada como estratégia de ensino, pode contribuir para a aprendizagem de matemática” (NASCIMENTO, 2007, p.37). Na literatura encontra-se autores (FRANCHI, 1993; VILARREAL, 1999; ARAÚJO, 2002; BARBOSA, 2004; BIEMBENGUT, 2009) que abordam temas relacionando o Cálculo Diferencial e Integral e a Modelagem Matemática.

A Modelagem Matemática no ensino de matemática vem sendo empregada como estratégia de quebrar a forte dicotomia existente entre a matemática formal e sua utilidade na vida real. Assim, existem distintas maneiras de compreender uma atividade de modelagem. Borba, Meneghetti e Hermeni (1997), enfatizam a escolha do problema pelos alunos; Barbosa (2001), relaciona o envolvimento dos alunos em situações problemáticas com referência na realidade; Bassanezi (2002) destaca a construção de modelos matemáticos.

O ensino e a aprendizagem com Modelagem Matemática torna o aluno consciente da aplicação da matemática, pois considera problemas que envolva o seu dia-a-dia. A Modelagem Matemática pode ser abordada como um momento de utilização de conceitos já aprendidos. É uma fase de fundamental importância para que os conceitos trabalhados tenham um maior significado para os alunos, inclusive com o poder de torná-los mais críticos na análise e compreensão de fenômenos diários” (D’AMBRÓSIO, 1986, p.3).

D’AMBROSIO (1986) relaciona a modelagem como um “procedimento rico” no qual as situações reais vão atravessar com respostas efetivas e não como uma simples resolução formal para um problema fictício.

Neste sentido, ao desenvolver uma atividade de Modelagem Matemática na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, o aluno poderá despertar sua criatividade, pensamento intuitivo e construir os seus conhecimentos, além de observar aplicação do Cálculo em situações práticas.

3 Materiais e métodos

Muitas atividades propostas em cursos de Cálculo Diferencial e Integral são exercícios diretos para calcular, por exemplo, uma integral dada ou um problema com dados fictícios. Procurou-se abordar o conceito de integral utilizando algo concreto e do convívio diário dos alunos. Desta forma, foi proposto os seguintes questionamentos: Como calcular o volume de uma laranja? Como calcular a área da superfície de uma laranja?

O processo de modelagem se deu na evolução dos conceitos matemáticos para resolver os problemas. Os alunos tiveram necessidade de recorrer a conceitos e conteúdos do Cálculo Diferencial e Integral, de modo que pudessem ver suas aplicações e atribuir-lhes sentido.

Os modelos matemáticos empregados para avaliação do volume e da área da superfície de uma laranja obedece a uma sequência gradual de complexidade conceitual. No entanto, destaca-se que o grau de aproximação do resultado obtido não significa necessariamente que seja proporcional à complexidade do modelo.

Para solucionar os problemas propostos utilizou-se os seguintes materiais: uma laranja, jarra com escala de medição, régua, barbante, caneta e papel milimetrado.



Figura 1: Materias utilizados

Fonte: Autores

3.1 Cálculo do volume de uma laranja

Inicialmente foi proposto um processo mecânico, baseado no Princípio de Arquimedes, para obter o volume da laranja: Mergulha-se a laranja num recipiente com água e o volume do líquido deslocado corresponde ao volume da laranja (Figura 2). O fluido deslocado significa o fluido que ocuparia o espaço ocupado pela laranja. Neste caso, o volume da laranja encontrado foi de 225 cm³.



Figura 2: Processo mecânico para obter volume da laranja

Fonte: Autores

Num segundo momento, foi solicitado aos alunos para selecionar conceitos matemáticos que poderiam usar para resolver o problema. A primeira ideia que surgiu, foi comparar a laranja com uma esfera e usar a fórmula do volume de uma esfera:

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad (1)$$

Para tanto, a medida do perímetro ($P = 2\pi r$) foi obtida com auxílio de um barbante de duas maneiras:

- a) Medindo o perímetro da laranja com auxílio de um barbante que circunda a laranja na posição de repouso. Usando uma régua foi possível obter o comprimento do barbante que corresponde ao perímetro $P = 25.1 \text{ cm}$. Da medida do perímetro, obteve-se o raio $r =$

3.994 *cm* e, aplicando na fórmula do volume de uma esfera, foi possível obter um valor aproximado para o volume da laranja:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(3.994)^3 = 266.87 \text{ cm}^3 \quad (2)$$

- b) Cortando-se a laranja ao meio, mede-se o raio r do círculo inscrito na face plana da laranja, como mostra a Figura 3, obtendo-se $r = 3.6287 \text{ cm}$.



Figura 3: Medindo a circunferência interna da laranja

Fonte: Autores

Neste caso, o volume da laranja é:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(3.6287)^3 = 200.14 \text{ cm}^3 \quad (3)$$

Considerando a média entre os dois valores obtidos, tem-se:

$$V_{laranja} \cong 233.507 \text{ cm}^3 \quad (4)$$

Dentro do repertório de conceitos trabalhados na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, os alunos também perceberam que era possível calcular o volume da laranja usando integração.

Aproximando a configuração do corte central da laranja por uma circunferência, o volume de cada fatia é dado por:

$$V_i = \pi y^2 \Delta x \quad (5)$$

onde $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

O volume total é a soma dos volumes das fatias, isto é,

$$\begin{aligned} V &= 2 \int_0^{3.9} \pi y^2 dx = 2\pi \int_0^{3.9} [(3.9)^2 - x^2] dx = \\ &= 2\pi \left(-\frac{x^3}{3} + 15.21x \right) \Big|_0^{3.9} = 248.34 \text{ cm}^3 \end{aligned} \quad (6)$$

3.2 Cálculo da área da superfície de uma laranja

Usando papel milimetrado foi possível obter a área da superfície da laranja. Neste processo, os alunos usaram a criatividade e, após um breve debate de como poderiam realizar este cálculo de forma empírica, chegou-se a seguinte ideia: Corta-se a laranja em 4 partes (Figura 4) e retira sua casca (Figura 5). Em seguida, sobrepõe na folha de papel milimetrado fazendo o contorno de cada pedaço da casca da laranja como mostra a Figura 6. Por fim, realiza-se a contagem dos quadradinhos internos (Figura 7).



Figura 4: Laranja cortada em quatro partes

Fonte: Autores



Figura 5: Casca da laranja em quatro partes

Fonte: Autores

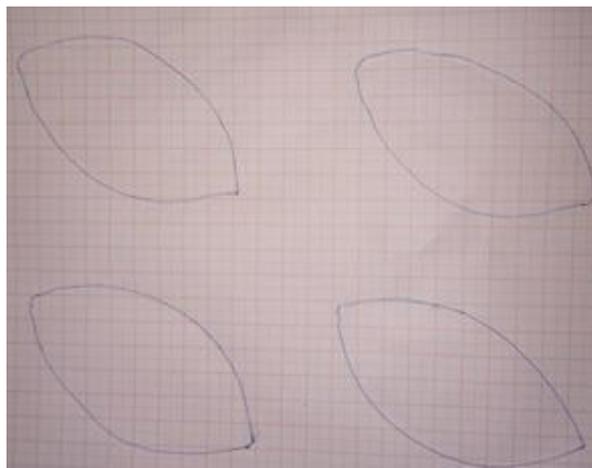


Figura 6: Contorno das quatro partes da casca da laranja

Fonte: Autores

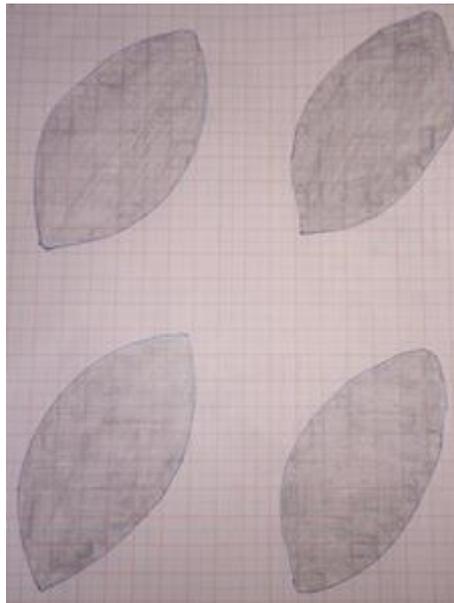


Figura 7: Contagem dos quadrados internos

Fonte: Autores

Tem-se, portanto, que a área da superfície da laranja corresponde ao somatório das áreas das quatro partes:

$$S = 42.36 + 39.62 + 38.95 + 37.00 = 157.93 \text{ cm}^2 \quad (7)$$

Aproximando a laranja por uma esfera de raio $r = 3,994 \text{ cm}$ e usando a fórmula da área da superfície de uma esfera

$$S = 4\pi r^2, \quad (8)$$

a área obtida foi $S = 200.35 \text{ cm}^2$.

Recorrendo aos conceitos do cálculo diferencial e integral estudados na disciplina e, aproximando o corte central da laranja por uma circunferência, foi possível calcular a área da superfície da laranja a partir da integral:

$$S = 2 \int_0^r 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (9)$$

onde r denota o raio da circunferência e $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

Temos,

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} \quad (10)$$

Logo,

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^{3.9} 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = 2 \int_0^{3.9} 2\pi r dx = \\ &= 4\pi(3.9)x|_0^{3.9} = 191.03 \text{ cm}^2 \end{aligned} \quad (11)$$

4 Considerações sobre as atividades

Observa-se que muitos alunos apenas decoram fórmulas no curso de Cálculo para passar nos exames, mas não entendem o seu significado. A Modelagem Matemática mostra como é possível transformar um conceito de Cálculo Diferencial e Integral, que pode ser de difícil entendimento, para uma forma mais dinâmica, enfatizando o seu significado, o que pode melhorar a compreensão dos alunos.

Levando-se em conta que, para algumas pessoas, conhecer uma utilização concreta é primordial para despertar seu interesse em estudar determinados conceitos, foi possível motivar os alunos para o estudo do Cálculo, além de despertar a busca por novos meios para solucionar problemas relacionados com o seu dia-a-dia.

No caso dos alunos do curso de Licenciatura em Matemática, obter os dados da laranja, tais como raio e comprimento, vivenciando a situação a ser investigada, proporcionou inseri-los no processo de construção da Matemática, da obtenção do modelo que descreve a situação em estudo. Os modelos utilizados para resolver os problemas propostos obedecem um nível de complexidade, partindo de um processo mecânico até chegar ao conceito de integral. Através de vários métodos que foi utilizado para calcular o volume e a

área da superfície de uma laranja, mesmo antes do uso da integral, pode-se ter uma noção do resultado através de modelos já conhecidos no Ensino Médio.

Para o exemplo apresentado, o erro relativo no cálculo do volume utilizando integral foi de 10.37%, quando comparado com o método mecânico de imersão. Já no cálculo da área da superfície da laranja por meio de integral, o erro relativo foi de 20%, quando comparado com o método empírico. Observa-se que o erro é compatível com o obtido em BASSANEZI (2002) para o cálculo do volume de uma maçã utilizando métodos semelhantes.

5 Conclusão

A modelagem matemática permitiu ao aluno converter em ações alguns conceitos adquiridos ou construídos com o professor em sala de aula. O formato de modelagem matemática aplicado nesta pesquisa mostra a relação de conceitos do Cálculo Diferencial e Integral com outros métodos já conhecidos para resolver o mesmo problema. Contudo, destaca-se que o grau de aproximação do resultado não é necessariamente proporcional à complexidade do modelo. No caso específico do cálculo do volume da laranja, o método mecânico seria o mais simples e preciso.

Foi possível apresentar problemas práticos relacionados com os conteúdos da disciplina, tornando o processo de ensino aprendizagem mais dinâmico e atrativo.

6 Referências

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; FATORI, Luci Harue; SOUZA, Luciana Gastalfi Sardinha. **Ensino de Cálculo: uma abordagem usando Modelagem Matemática**. Revista Ciência e Tecnologia, [S.I.], v. 10, n. 16, jan. 2010. ISSN 2236-6733.

ARAUJO, J. de L. **Cálculo, tecnologias e modelagem matemática: as discussões dos alunos**. Tese (Doutorado), UNESP, IGCE, Rio Claro, 2002, 173p

ANDRADE, Mirian Maria. **Ensino E Aprendizagem De Estatística Por Meio Da Modelagem Matemática**: Uma Investigação Com O Ensino Médio. Rio Claro - SP, 2008.

BARBOSA, J. C. **Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico**. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24., 2001, Caxambu. Anais.Caxambu: ANPED, 2001. 1 CD-ROM

BARBOSA, J.C. **Modelagem Matemática em cursos para não-matemáticos**. In: Disciplinas Matemáticas em cursos superiores, CURY, H.N. (org), EDIPUCRS, Porto Alegre, 2004.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. São Paulo: Contexto, 2002.

BIEMBENGUT, M. S; Martins, R. **Mapeamento dos Programas Curriculares de Modelagem Matemática dos Cursos de Formação de Educadores de Matemática (licenciaturas) do Brasil**. Relatório Final de Iniciação Científica. Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica PIBIC/FURB, 2009.

BORBA, M. C., MENEGHETTI, R. C. G., HERMINI, H. A. Modelagem, calculadora gráfica e interdisciplinaridade na sala de aula de um curso de ciências biológicas. Revista de Educação Matemática da SBEM-SP, n.3, p. 63-70, 1997.

D'AMBROSIO, U. **Da Realidade à Ação**: reflexões sobre educação e matemática. 2. ed. São Paulo: Unicamp, 1986.

FRANCHI, R.H. **A modelagem matemática como estratégia de aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral nos cursos de engenharia**. Dissertação (Mestrado), UNESP, Rio Claro, 1993, 148p.

LOPES, A. **Algumas reflexões sobre a questão do alto índice de reprovação nos cursos de Cálculo da UFRGS.** Matemática Universitária nº26/27 - junho/dezembro 1999.

LORENZATO, Sérgio. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. **LORENZATO, Sérgio. Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores.** Campinas: Autores Associados, p. 3-38, 2006.

NASCIMENTO, Ross Alves do. **Modelagem matemática com simulação computacional na aprendizagem de funções.** Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. Programa de Pós-Graduação em Educação. Recife, 2007.

ONUCHIC, L. de L. R.; ALLEVATO, N. S. G. **Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas.** Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011.

Renz, H. J. **A Importância da Modelagem Matemática no Ensino-Aprendizagem.** Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Regional Catalão, Catalão, Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT - profissional), Catalão, 2015.

SPINA, Catharina de Oliveira Corcoll. **Modelagem matemática no processo ensino-aprendizagem do cálculo diferencial e integral para o Ensino Médio.** Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista. Instituto de Geociência e Ciências Exatas (IGCE) – Rio Claro/Pós-Graduação em Educação Matemática. 2002.

STARON, Francielly. O monstro da reprovação em Cálculo Diferencial Integral. **Conversando sobre extensão**, v. 14, p. 1-7, 2016.

VILLARREAL, M. **O pensamento Matemático de Estudantes Universitários de Cálculo e Tecnologias informáticas.** Tese (Doutorado), UNESP, Doutorado em Educação Matemática, Rio Claro, 1999.